Kenngrößen von Produktionsfunktionen

Allgemeine Definitionen für

$$x = f(v_1, v_2)$$

Grenzproduktivität des Faktors i: $\dfrac{\partial x}{\partial v_i}$

Durchschnittsproduktivität des Faktors i: $\dfrac{x}{v_i}$

Beispiel: CES-Produktionsfunktion

$$x = a\,(\alpha_1 v_1^\rho + \alpha_2 v_2^\rho)^{\eta/\rho}\,, \quad 0 \neq \rho \leq 1,\; a, \eta, \alpha_i > 0,\; \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial v_i} = \eta \alpha_i a\,(\alpha_1 v_1^\rho + \alpha_2 v_2^\rho)^{(\eta-\rho)/\rho}\, v_i^{\rho-1} = \eta \alpha_i a^{\rho/\eta} x^{(\eta-\rho)/\eta} v_i^{\rho-1}$$

$$\frac{x}{v_i} = \frac{a\,(\alpha_1 v_1^\rho + \alpha_2 v_2^\rho)^{\eta/\rho}}{v_i}$$

Der **Inputkoeffizient** ist der Kehrwert der Durchschnittsproduktivität. Von der Grenzproduktivität (Dimension: Outputeinheiten/Inputeinheiten) ist das **Grenzprodukt** $dx = (\partial x/\partial v_i) dv_i$ (Dimension: Outputeinheiten) zu unterscheiden. Die partielle Produktionselastizität eines Faktors i ist gleich dem Quotienten aus der Grenzproduktivität und der Durchschnittsproduktivität.

Partielle Produktionselastizität: $\varepsilon_i := \dfrac{dx/x}{dv_i/v_i} = \dfrac{\partial x}{\partial v_i}\dfrac{v_i}{x}$

$$\varepsilon_i = \frac{\eta \alpha_i v_i^\rho}{(x/a)^{\rho/\eta}}$$

Bei vollständiger Konkurrenz auf dem Produktmarkt und den Faktormärkten ist der reale Nutzungspreis q_i/p des Faktors i gleich seiner Grenzproduktivität. Daher gibt ε_i in diesem Fall die **Faktorertragsquote** $(q_i v_i)/(px)$ des Faktors i an. Die Summe der partiellen Produktionselastizitäten ist gemäß dem Wicksell-Johnson-Theorem gleich der Skalenelastizität.

Skalenelastizität: Mit $x(\lambda) := f(\lambda v_1, \lambda v_2)$ ist die Skalenelastizität an der Stelle (v_1, v_2) definiert als

$$\varepsilon := \left.\frac{df(\lambda v_1, \lambda v_2)/f(\lambda v_1, \lambda v_2)}{d\lambda/\lambda}\right|_{\lambda=1} = \left.\frac{dx}{d\lambda}\frac{\lambda}{x}\right|_{\lambda=1}$$

Unter Verwendung der Kettenregel erhält man

$$\varepsilon = \left.\frac{df(\lambda v_1, \lambda v_2)}{d\lambda}\frac{\lambda}{f(\lambda v_1, \lambda v_2)}\right|_{\lambda=1} = \left.\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial x}{\partial(\lambda v_i)}\frac{\partial(\lambda v_i)}{\partial \lambda}\frac{1}{x}\right|_{\lambda=1},$$

also das **Wicksell-Johnson-Theorem**:

$$\varepsilon = \frac{\partial x}{\partial v_1}\frac{v_1}{x} + \frac{\partial x}{\partial v_2}\frac{v_2}{x} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Aufgrund des Wicksell-Johnson-Theorems müssen lediglich die beiden partiellen Produktionselastizitäten addiert werden:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\eta \alpha_1 v_1^\rho + \eta \alpha_2 v_2^\rho}{(x/a)^{\rho/\eta}} = \eta$$

Von Grenzfällen abgesehen liegen an der Stelle (v_1, v_2) lokal steigende (konstante, fallende) Skalenerträge genau dann vor, wenn $\varepsilon > 1$ ($\varepsilon = 1$, $\varepsilon < 1$) ist. Global konstante Skalenerträge sind gleichbedeutend damit, dass die Produktionsfunktion homogen vom Grade eins ist. Im Falle von homogenen Produktionsfunktionen stimmt der Homogenitätsgrad mit der Skalenelastizität überein.

Homogenitätsgrad: Die Funktion f ist homogen vom Grade r in v_1 und v_2, wenn für alle $\lambda > 0$ gilt

$$f(\lambda v_1, \lambda v_2) = \lambda^r f(v_1, v_2)$$

Ausgehend von $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ gilt daher bei totaler Faktorvariation $x = \lambda^r f(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, woraus $\varepsilon = r$ folgt.

Aus $a\,(\alpha_1(\lambda v_1)^\rho + \alpha_2(\lambda v_2)^\rho)^{\eta/\rho} = \lambda^\eta a\,(\alpha_1 v_1^\rho + \alpha_2 v_2^\rho)^{\eta/\rho}$ ergibt sich

$$r = \eta$$

Für den Fall $r = 1$ erhält man das **Adding Up-Theorem**. Denn da die partiellen Produktionselastizitäten bei vollständiger Konkurrenz gleich den Faktorertragsquoten sind, addieren sich diese Ertragsquoten zu eins. Das heißt, der gesamte Ertrag wird an die Faktoren verteilt.

Substitutionselastizität: Die Substitutionselastizität σ ist das absolute Verhältnis der relativen Änderung der **Faktorintensität** v_2/v_1 zur relativen Änderung der **Grenzrate der Substitution (GRS)** entlang einer Isoquante. Da im Kostenminimum einer Unternehmung bei vollständiger Konkurrenz auf den Faktormärkten die GRS $(-dv_1/dv_2)$ gleich dem Verhältnis der Faktorpreise q_2/q_1 ist, wenn beide Faktoren verwendet werden, kann man σ definieren als:

$$\sigma := -\left.\frac{d(v_2/v_1)/(v_2/v_1)}{d(q_2/q_1)/(q_2/q_1)}\right|_{x=\text{konst.}} = -\left.\frac{\partial(v_2/v_1)}{\partial(q_2/q_1)}\frac{q_2/q_1}{v_2/v_1}\right|_{x=\text{konst.}}$$

Aus $\dfrac{q_2}{q_1} = \dfrac{\partial x/\partial v_2}{\partial x/\partial v_1}$ folgt $\dfrac{v_2}{v_1} = \left(\dfrac{\alpha_1 q_2}{\alpha_2 q_1}\right)^{1/(\rho-1)}$. Anhand dieses Ausdrucks lässt sich σ berechnen:

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}$$

Spezialfälle der CES-Funktion: Die CES-Funktion enthält einige häufig verwendete Produktionsfunktionen als Spezialfälle (vgl. Varian, 1994): (1) Die **lineare Produktionsfunktion** ergibt sich für $\rho = \eta = 1$. In diesem Fall ist $\sigma = \infty$. (2) Die linear-limitationale **Leontief-Funktion** entsteht für $\eta = 1$ beim Übergang $\rho \to -\infty$, so dass $\sigma = 0$ ist. (3) Die **Cobb-Douglas-Funktion** $x = a v_1^{\eta\alpha_1} v_2^{\eta\alpha_2}$ erhält man als Grenzfall für $\rho \to 0$. Die Ergebnisse für $\partial x/\partial v_i$, $\varepsilon_i = \eta\alpha_i$, $\varepsilon = \eta$, $r = \eta$ und $\sigma = 1$ folgen in diesem Fall unmittelbar für $\rho = 0$ aus den Formeln für die CES-Funktion.